Μαθημα 20ο 15/12/2016

Πιθανοτητες

Ροπογεννητρια

$$m_X(t)=E(e^{tX})=\begin{cases}\sum_x e^{tx}\, p_X(x) & , X \text{ διακριτη}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & , X \text{ συνεχης}\end{cases}$$

Ιδιοτητες

i) Η $m_X(t)$ υπαρχει για $t=0$

ii) $m_{aX+b}(t)=e^{tb}\, m_X(at)$

iii) Συνδεση $m_X(t)$ με ροπες

Εστω η $m_X(t)$ υπαρχει σε μια περιοχη του 0, δηλαδη για $|t|<c$, $c>0$

- $$\frac{d}{dt} m_X(t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d}{dt}e^{tx}\right) f_X(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{tx} f_X(x)\,dx$$

- $$\frac{d^2}{dt^2} m_X(t)=\dots=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{tx} f_X(x)\,dx$$

$\vdots$

- $$m_X^{(k)}(t)=\frac{d^k}{dt^k} m_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{tx} f_X(x)\,dx$$

$$m_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0}=\frac{d^k}{dt^k} m_X(t)\Big|_{t=0}=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx \overset{\text{ορ}}{=} \mu_k$$

• $m_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = \dfrac{d^k}{dt^k} m_X(t)\Big|_{t=0} = \mu_k \quad , \quad k \in \mathbb{N}-\{0\}$

• $m_X(t) \overset{\text{ορ.}}{=} E(e^{tX}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(tX)^k}{k!}\right) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!} X^k\right) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!} \cdot E(X^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!} \mu_k$

iii) Θεωρημα μονοσημαντου ροπογεννητριων
Εστω οι τ.μ X και Y με συναρτησεις κατανομης F_X και F_Y αντιστοιχα. Αν οι ροπογεννητριες $m_X(t)$ και $m_Y(t)$ υπαρχουν και $m_X(t) = m_Y(t)$ για $|t|<c$, $c>0$ τοτε

$$F_X(x) \underbrace{\equiv}_{\text{ταυτιζεται}} F_Y(y) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Παραδειγμα
Εστω X διακριτη τ.μ με ροπογεννητρια

$$m_X(t) = \frac{1}{6} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Να βρεθει $E(X) = ;$ $Var(X) = ;$ και να προσδιοριστει η σ.π της X

απαντηση

$$m'_X(t)\Big|_{t=0} = E(X) \Rightarrow E(X) = \left[\frac{1}{6} e^{-t} + 2e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t}\right]_{t=0} = \dots = -\frac{5}{6}$$

$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$

$$E(x^2) \overset{\text{ορ}}{=} \mu_2 = m''_x(t)\Big|_{t=0} = \left[\frac{1}{6}e^{-t} + 2e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}\right]_{t=0} = \dots = \frac{15}{6}$$

Αρα $\quad Var(x) = \frac{15}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{15}{6} - \frac{25}{36} = \frac{6\cdot 15 - 25}{36} = \frac{90-25}{36} = \frac{65}{36}$

Η X διακριτη, εστω $x_1, x_2, \dots$ ειναι οι δυνατες τιμες της X
και εστω $p_x(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ η σ.π της X
Εξ' ορισμου

$$m_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i}\, p_x(x_i) \Rightarrow$$

$$m_x(t) = e^{-tx_1} p_x(x_1) + e^{-tx_2} p_x(x_2) + e^{-tx_3} p_x(x_3) + e^{-tx_4} p_x(x_4) + \dots$$

Συγκρινοντας τα $m_x(t)$ εχω:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1$$

$$p_x(x_1) = \frac{1}{6}, \quad p_x(x_2) = \frac{1}{2}, \quad p_x(x_3) = \frac{1}{3}$$

Τελικα η ζητουμενη σ.π θα ειναι

$$p_x(x) = \begin{cases} 1/6, & x = -1 \\ 1/2, & x = -2 \\ 1/3, & x = 1 \\ 0, & \forall \text{ αλλο } x \end{cases}$$

		Κατανομή	$E(X)$	$Var(X)$	$m_X(t)$
Διακριτές	1)	$B(n,p)$	np	$npq \ , q=1-p$	$(pe^t+1-p)^n, \ t\in\mathbb{R}$
	2)	$Hg(M,N,n)$	$\frac{nM}{M+N}$	$\frac{nMN}{(M+N)^2}\cdot\frac{M+N-n}{M+N-1}$	$\nexists$
	3)	$Geo(p)$	$1/p$	$q/p^2 \ , q=1-p$	$\frac{pe^t}{1-qe^t} \ , t<-\log q$
	4)	$NB(k,p)$	$\frac{k}{p}$	$\frac{kq}{p^2} \ , q=1-p$	$\frac{p^k e^{kt}}{(1-qe^t)^k} \ , t<-\log q$
	5)	$P(\lambda)$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}, \ t\in\mathbb{R}$
Συνεχείς	6)	$U(a,\beta)$	$\frac{a+\beta}{2}$	$\frac{(\beta-a)^2}{12}$	$\frac{e^{\beta t}-e^{at}}{t(\beta-a)} \ , t\in\mathbb{R}$
	7)	$Εκθ(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t} \ , t<\lambda$
	8)	$G(a,\beta)$	$a\beta$	$a\beta^2$	$(1-\beta t)^{-a} \ , t<1/\beta$
	9)	$B(a,\beta)$	$\frac{a}{a+\beta}$	$\frac{a\beta}{(a+\beta)(a+\beta+1)}$	$\nexists$
	10)	$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\} \ , t\in\mathbb{R}$

Ανισότητες Markov και Chebyshev

Πρόταση

α) Ανισότητα Markov

Έστω X μια μη αρνητική τ.μ με μέση τιμή $E(X)$

Τότε για $a>0$

$$P(X\geq a)\leq \frac{E(X)}{a} \quad ή \quad P(X<a)\geq 1-\frac{E(X)}{a}$$

β) Ανισοτητα Chebyshev

Εστω τ.μ X με μεση $\mu = E(X)$ και διακυμανση $\sigma^2 = Var(X)$ τοτε για $a > 0$

$$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2} \quad ή \quad P(|X-\mu| < a) \geq 1 - \frac{Var(X)}{a^2}$$

Αποδειξη

α) Θεωρω την τ.μ

$$Y = \begin{cases} a, & X \geq a \\ 0, & X < a \end{cases}$$

Y = διακριτη τ.μ με τιμες $0, a$

Επιπλεον $Y \leq X \xrightarrow[\text{μεσων τιμων}]{\text{ιδιοτητες}} E(Y) \leq E(X)$

αρα $E(Y) \leq E(X) \Rightarrow a \cdot p_Y(a) + 0 \cdot p_Y(0) \leq E(X) \Rightarrow$

$a\,P(Y=a) \leq E(X) \Rightarrow P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

β) $P(|X-\mu| \geq a) = P((X-\mu)^2 \geq a^2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ανισοτητα} \\ \text{Μαρκον}}}{\geq} \dfrac{E(X-\mu)^2}{a^2} = \dfrac{Var(X)}{a^2}$

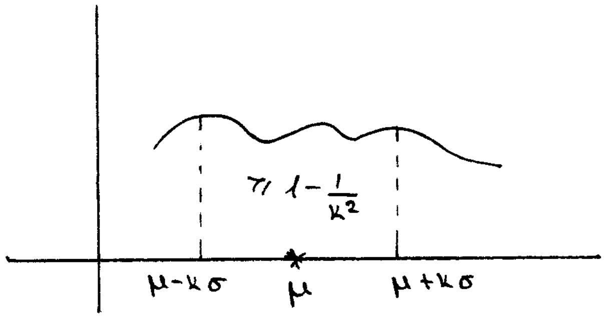
Πορισμα

Για την τ.μ X

α) $P(|X| \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}, \quad a > 0$

β) Αν $X \geq 0$ τοτε $P(X^k \geq a) = \dfrac{\mu_k}{a}, \quad k \in \mathbb{N} - \{0\}$

γ) $P(|X-\mu| \geq k\cdot\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ ή $P(|X-\mu| < k\cdot\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$



δ) $P(X\geq a) \leq \inf\limits_{t\geq 0}\{e^{-at}\, m_X(t)\}$

Απόδειξη

$$P(X\geq a) \overset{t>0}{=} P(tX \geq ta) \underset{\text{μονοτονη}}{\overset{e}{=}} P(e^{tX}\geq e^{ta}) \overset{\text{Ανισοτητα Markov}}{\leq} \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}} = e^{-ta}\, m_X(t)$$

Παραδειγμα

τ.μ $X\sim B(n=16,\ p=1/2)$. Να υπολογισετε

α) την πιθανοτητα $P(4<X<12)$

β) το κατω φραγμα για την πιθανοτητα $P(4<X<12)$

απαντηση

α) $P(4<X<12) = \cancel{F_X(12)} - F_X(4)$

$X\sim B(n=16,\ p=1/2)$ τοτε η σ.π

$$p_X(x) = \binom{16}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(1-\frac{1}{2}\right)^{16-x}, \quad x=0,1,..,16$$

Συνεπως $P(4<X<12) = \sum\limits_{x=5}^{11} p_X(x) = \sum\limits_{x=5}^{11}\binom{16}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{16-x} = \dots$

β) $E(X) = np = 8$, $Var(X) = npq = 16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 4$

$\sigma = +\sqrt{Var(X)} = 2$

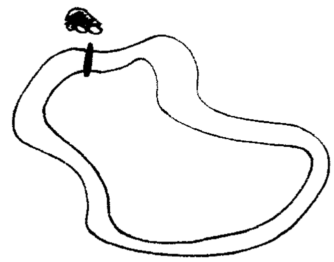
$P(4<X<12) = P(4-8 < X-\overset{\mu}{\overset{\parallel}{8}} < 12-8) = P(-4<X-\mu<4) = P(|X-\mu|<4) =$

$= P(|X-\mu|<4) = P(|X-\mu| < \underset{k}{2}\cdot\underset{\sigma}{2}) \geq 1-\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Παραδειγμα

Μεσος χρονος που διανυει την πιστα ειναι 3min με τυπικη αποκλιση $\frac{1}{2}$. Ειναι ρεαλιστικο να πιστευει(σαι) θα πετυχει χρονο μεταξυ 1 και 5min;

απαντηση



Αν X ο χρονος να διασχισει την πιστα σε μια οποιαδηποτε προσπαθεια.
$E(X)=\mu=3$ και $\sigma=\frac{1}{2}$

Θελω να εχω μια αισθηση $P(1<X<5) = \begin{cases} F_X(5)-F_X(1) & (\text{αν } X \text{ συν.}) \\ \int_1^5 f_X(x)\,dx \end{cases}$

$$P(1<X<5)=P(1-3<X-\overset{3}{\overset{\shortparallel}{\mu}}<5-3)=P(-2<X-\mu<2)=$$
$$=P(|X-\mu|<2)$$

αρα $\kappa\sigma=2 \Rightarrow \kappa\cdot\frac{1}{2}=2 \Rightarrow \kappa=4$

Επομενως:

$$P\left(|X-\mu|<4\cdot\frac{1}{2}\right)\geq 1-\frac{1}{\kappa^2}=1-\frac{1}{4^2}=0,9375$$

Αρα η πιθανοτητα να πετυχει χρονο αναμεσα σε 1 και 5min ειναι $P(1<X<5)\geq 0,9375$, συνεπως ειναι αρκετα ρεαλιστικο.

Αλλαγη Μεταβλητων

Προβλημα: Εστω μια τ.μ X με γνωστη κατανομη. Ποια η κατανομη της τ.μ $Y=g(X)$? οπου g μια πραγματικη συναρτηση

(I) Διακριτη περιπτωση

Μεθοδος της σ.π

Εστω X διακριτη τ.μ με τιμες $x_1, x_2, \dots$ και σ.π $p_X(x_i)$, $i=1,2,\dots$

Τιμες της Y: $y_i=g(x_i)$, $i=1,2,\dots$

$$p_Y(y_i)\overset{\text{op}}{=}P(Y=y_i)=P(g(X)=y_i)=\sum_{\{x_i:\, g(x_i)=y_i\}} p_X(x_i)$$

Παραδειγμα

Εστω τ.μ X με τιμες $0,1,2$ και σ.π $p_X(x)=\frac{1}{3}$, $x=0,1,2$.

Κατανομη $Y=2X+1$

απαντηση

τιμες Y : $y=2X+1$, $x=0,1,2$ αρα

$y=1,3,5$

αρα η Y ειναι διακριτη

$$p_Y(1) \overset{\text{ορ}}{=} P(Y=1)=P(2X+1=1)=P(X=0) \overset{\text{ορ}}{=} p_X(0)=\frac{1}{3}$$

$$p_Y(3) \overset{\text{ορ}}{=} P(Y=3)=P(2X+1=3)=P(X=1) \overset{\text{ορ}}{=} p_X(1)=\frac{1}{3}$$

$$p_Y(5) \overset{\text{ορ}}{=} P(Y=5)=P(2X+1=5)=P(X=2) \overset{\text{ορ}}{=} p_X(2)=\frac{1}{3}$$

Συνεπως εχουμε

$$p_Y(y)=\begin{cases} 1/3, & y=1,3,5 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

Παραδειγμα

τ.μ X με τιμες $x=0,\pm1,\pm2,\pm3$ και σ.π $p_X(x)=\frac{1}{7}$, $x=0,\pm1,\pm2,\pm3$

Κατανομη τ.μ $Y=X^2$

αναντηση

Τιμες Y: $y_i=g(x_i)=x_i^2$

$y=0,1,4,9$

αρα η Y διακριτη

$p_Y(0)\overset{\text{ορ}}{=}P(Y=0)=P(X^2=0)=P(X=0)=p_X(0)=\frac{1}{7}$

$p_Y(1)\overset{\text{ορ}}{=}P(Y=1)=P(X^2=1)=P(X=-1 \text{ ή } X=1)=P(X=-1)+P(X=1)=$
$=p_X(-1)+p_X(1)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$

$p_Y(4)\overset{\text{ορ}}{=}P(Y=4)=P(X^2=4)=P(X=-2 \text{ ή } X=2)=P(X=-2)+P(X=2)=$
$=p_X(-2)+p_X(2)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$

$p_Y(9)\overset{\text{ορ}}{=}P(Y=9)=P(X^2=9)=P(X=-3 \text{ ή } X=3)=P(X=-3)+P(X=3)=$
$=p_X(-3)+p_X(3)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$

Συνεπως εχουμε

$$p_Y(y)=\begin{cases} 1/7, & y=0 \\ 2/7, & y=1,4,9 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

Παραδειγμα

τ.μ X

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/\nu & , x=0 \\ 1/2\nu & , x = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(\nu-1) \end{cases} \quad , \nu > 1 , \nu \in \mathbb{N}$$

Κατανομη $Y = |X|$

απαντηση

Τιμες Y : $y = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$

Αρα Y διακριτη

$$p_Y(0) \stackrel{\text{ορ}}{=} P(Y=0) = P(|X|=0) = P(X=0) = p_X(0) = \frac{1}{\nu}$$

$$p_Y(1) \stackrel{\text{ορ}}{=} P(Y=1) = P(|X|=1) = P(X=-1 \text{ ή } X=1) = P(X=-1) + P(X=1) =$$
$$= p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu} = \frac{2}{2\nu} = \frac{1}{\nu}$$

⋮ ιδια και τα υπολοιπα $(= \frac{1}{\nu})$

Συνεπως εχουμε

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/\nu & , y = 0, 1, \ldots, (\nu-1) \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$